# Dérivation de l'inégalité de Bell

# Notations

Ce calcul est fait avec des détecteurs de spin, certaines constantes sont différentes, mais le raisonnement est le même.
Il est gracieusement fourni pour ce cours par Bertrand Hespel (UNamur).

a, a', b, b' : angles d'orientation des détecteurs de spin
A, B : spin mesuré en A et en B (up : +1 ; down : -1) (dans le cours, on aurait noté : «passe le polariseur» : +1 ; «ne passe pas le polariseur» : -1)
E(a, b) : moyenne des sommes de résultats obtenues avec l'angle a et l'angle b.
$\rho$ = densité de probabilité

Conditions :
O : la cause commune n'est pas influencée par les résultats (pas de rétrocausalité)
F : les résultats sont indépendants l'un de l'autre (pas d'influence instantanée à distance)

$$E(a,b) = \int A(a,\lambda)\cdot B(b,\lambda)\cdot \underbrace{P(A,B/a,b,\lambda)}_{\overset{F}{=}\; P(A|a,\lambda)\cdot P(B/b,\lambda)}\cdot \underbrace{\rho_{ab}(\lambda)}_{\overset{O}{=}\; \rho(\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \int A(a,\lambda)\cdot B(b,\lambda)\cdot P(A|a,\lambda)\cdot P(B/b,\lambda)\,\rho(\lambda)\, d\lambda$$

$$E(a,b') = \int A(a,\lambda)\cdot B(b',\lambda)\cdot P(A/a,\lambda)\cdot P(B/b',\lambda)\cdot \rho(\lambda)\, d\lambda$$

$$E(a',b) = \int A(a',\lambda)\cdot B(b,\lambda)\cdot P(A|a',\lambda)\cdot P(B/b,\lambda)\cdot \rho(\lambda)\, d\lambda$$

$$E(a',b') = \int A(a',\lambda) \cdot B(b',\lambda) \cdot P(A/a',\lambda) \cdot P(B/b',\lambda) \cdot \rho(\lambda)\, d\lambda$$

$$\bar{A}(x,\lambda) \equiv (+1) \cdot P(A=+1/x,\lambda) + (-1) \cdot P(A=-1/x,\lambda)$$

$$\bar{B}(y,\lambda) \equiv (+1) \cdot P(B=+1/y,\lambda) + (-1) \cdot P(B=-1/y,\lambda)$$

$$-1 \leq \bar{A}(x,\lambda) \leq 1$$

$$-1 \leq \bar{B}(y,\lambda) \leq 1$$

$$\left[\begin{array}{l} E(a,b) = \int \bar{A}(a,\lambda)\, \bar{B}(b,\lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda \\ E(a,b') = \int \bar{A}(a,\lambda)\, \bar{B}(b',\lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda \end{array}\right.$$

$$E(a,b)+E(a,b')=\int \bar{A}(a,\lambda)\left[\bar{B}(b,\lambda)+\bar{B}(b',\lambda)\right]\rho(\lambda)\,d\lambda$$

$$|E(a,b)+E(a,b')|\leqslant\int \left|\bar{B}(b,\lambda)+\bar{B}(b',\lambda)\right|\cdot\rho(\lambda)\,d\lambda$$

mais aussi

$$\left[\begin{array}{l} E(a',b)=\int \bar{A}(a',\lambda)\cdot\bar{B}(b,\lambda)\,\rho(\lambda)\,d\lambda \\ E(a',b')=\int \bar{A}(a',\lambda)\cdot\bar{B}(b',\lambda)\,\rho(\lambda)\,d\lambda \end{array}\right.$$

$$E(a',b)-E(a',b')=\int \bar{A}(a',\lambda)\left[\bar{B}(b,\lambda)-\bar{B}(b',\lambda)\right]\rho(\lambda)\,d\lambda$$

$$|E(a',b)-E(a',b')|\leqslant\int \left|\bar{B}(b,\lambda)-\bar{B}(b',\lambda)\right|\cdot\rho(\lambda)\,d\lambda$$

Donc,

$$|E(a,b)+E(a,b')| + |E(a',b)-E(a',b')|$$

$$\leqslant$$

$$\int \underbrace{\left[\,|\bar{B}(b,\lambda)+\bar{B}(b',\lambda)| + |\bar{B}(b,\lambda)-\bar{B}(b',\lambda)|\,\right]}_{\begin{gathered} \| \\ 2\bar{B}(b,\lambda), \\ -2\bar{B}(b,\lambda), \\ 2\bar{B}(b',\lambda) \text{ ou} \\ -2\bar{B}(b',\lambda) \end{gathered}} \cdot \rho(\lambda)\, d\lambda \;\leqslant\; 2$$

Finalement,

$$\left| E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b') \right| \leqslant 2$$

ou

$$\boxed{-2 \leqslant E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b') \leqslant +2}$$

Inégalité de Bell
dans la forme que lui ont donnée
Clauser, Horne, Shimony & Holt